COLEGIO ALEMÁN QUITO

Quito /Ecuador | 14. November 2011
Vorabiturprüfung Mathematik

Klassen: VIa Di (Golbeck) / VIb Di (Krowka) | Bearbeitungszeit: 240 Minuten

---

1. Aufgabe: Analytische Geometrie (Lösung)

1.1. Man wählt z.B. den Ortsvektor des Punktes A als Stützvektor der Ebene und als Richtungsvektoren den Richtungsvektor der Geraden (die Teilmenge der Ebene ist) und den Verbindungsvektor zwischen dem Punkt A und dem Stützpunkt der Geraden.

Es gilt:

$$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + v\cdot\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}\ ,\ u,v \in \mathrm{IR}$$

Um die Schnittgerade zwischen den Ebenen E_1 und E_2 zu ermitteln, werden z.B. die Ebenengleichungen gleichgesetzt, dann das sich ergebende LGS als Koeffizientenmatrix mit dem GTR (rref) vereinfacht, und aus einer Parameterbeziehung die Geradengleichung entwickelt. Alternativ kann eine der Ebenen in die Normalenform umgewandelt werden, in die dann die zweite Ebenengleichung eingesetzt wird. Dies ist hier sinnvoll, weil in 1.2. sowieso eine Normalenform von E_2 benötigt wird.

Normalenvektor von E_2:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}$$

Normalenform von E_2:

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix} = 0$$

Einsetzen von E_1 in die Normalenform:

$$\left[\begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}-6\\-3\\2\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}-6+3u+7v\\-3+6u\\2+3v\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix} = 0 - 30u + 5v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 6u$$

Einsetzen in die Gleichung von E_1 ergibt

$$\vec{s} = \begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + 6u\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}42\\0\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}45\\6\\18\end{pmatrix}$$

Damit ist

$$s:\vec{x} = \begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}15\\2\\6\end{pmatrix}\ ,\ \lambda \in \mathrm{IR}$$

die Gleichung der Schnittgeraden von E_1 und E_2.

Zum Nachweis, dass die Geraden g und s sich schneiden lässt sich einerseits durch Gleichsetzen der Terme ein LGS betrachten, welches bei Lösbarkeit den Schnitt der Geraden zeigt. Alternativ kann folgende Betrachtung durchgeführt werden:
g und s liegen beide in E_1, d.h. sie schneiden sich oder sie sind parallel. Die Untersuchung der jeweiligen Richtungsvektoren auf Kollinearität zeigt, dass sich die Geraden schneiden.

$$\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} \neq \mu \cdot \begin{pmatrix}15\\2\\6\end{pmatrix} \text{ für alle } \mu \in \mathrm{IR}$$

1.2. Zur Abstandsbestimmung wird die Hessesche Normalenform von E_2 benötigt:

$$E_2\text{: } \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix} = 0 \quad \text{(vgl. 1.1.)}$$

$$\left|\vec{n}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+36+9} = 7\,\text{L.E.}$$

Damit ist $\vec{n}^0 = \frac{1}{\left|\vec{n}\right|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}$ Normaleneinheitsvektor von E_2.

HNF von E_2:

$$E_2\text{: } \frac{1}{7} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix} = 0$$

Abstand des Punktes P(-1|9|7) von der Ebene E_2:

$$d_{P,E_2} = \left|\frac{1}{7} \cdot \left[\begin{pmatrix}-1\\9\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix}1\\6\\5\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{7} \cdot (2-36-15)\right| = 7\,\text{L.E.}$$

1.3. Die gesuchte Geradengleichung erkennt man durch Hinsehen, denn alle Ebenen enthalten

$$h\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$E^*\text{: } 6x_1 - 23x_2 - 14x_3 + 104 = 0$$

Normalenvektor von E^*: $\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\-23\\-14\end{pmatrix}$

Da der Normalenvektor auf beiden Richtungsvektoren der Ebene senkrecht steht, muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -23 \\ -14 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a+8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$6 \cdot (a+8) - 69 = 0 \;\Leftrightarrow\; 6a + 48 - 69 = 0 \;\Leftrightarrow\; 6a = 21 \;\Leftrightarrow\; a = 3{,}5$

Damit ist $E^* = E_{3,5}$.

(Weitere Überprüfungen müssen nicht vorgenommen werden, weil E* nach Voraussetzung eine Ebene der Schar ist.)

1.4. Man konstruiert eine Hilfsebene E, die Q enthält und senkrecht zu g verläuft. Q ist bekannter Punkt von E, der Richtungsvektor von g ist Normalenvektor von E.

Also ist $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ eine Normalengleichung von E.

Berechnung des Schnittpunktes von g und E durch Einsetzen:

$$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+3r \\ 6r \\ 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$-15 + 45r = 0 \;\Leftrightarrow\; r = \frac{1}{3}$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad S(0|2|7)$$

Abstand zwischen Q und S:

$$\left|\overrightarrow{OS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45} \approx 6{,}71\,\text{L.E.}$$

1.5. Der Schnittwinkel der Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren:

$$\vec{n}_{E^*} = \begin{pmatrix} 6 \\ -23 \\ -14 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{(vgl. 1.1.)}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -23 \\ -14 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -23 \\ -14 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{192}{\sqrt{761} \cdot \sqrt{49}} \approx 0{,}994 \quad\Rightarrow\quad \alpha = \arccos(0{,}994) \approx 6{,}1^\circ$$

2. Aufgabe: Stochastik (Lösung)

2.1. Betrachtet wird die Zufallsgröße
X: „Auszahlung an B pro Spiel in Euro."
X={0 ; 1 ; 3 ; 4}
Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

Wurfergebnis	{(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)}	{(1,1),(2,2),(4,4),(5,5)}	{(3,3),(6,6)}	Rest
X = k	1	3	4	0
P(X = k)	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{20}{36}$

Der Erwartungswert für die Auszahlung pro Spiel liegt bei

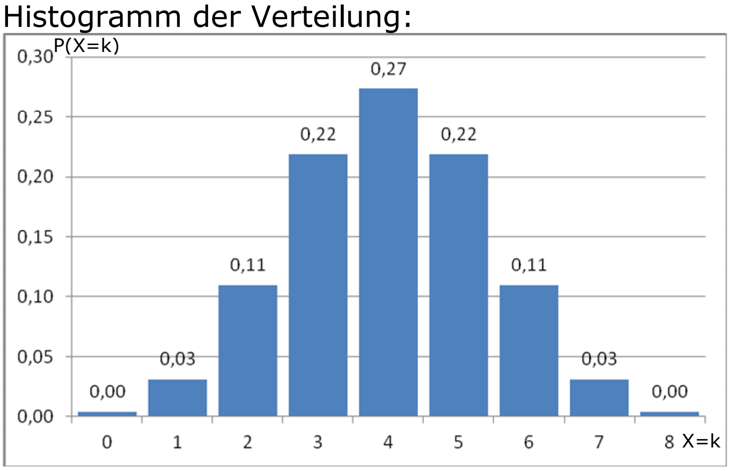
$$E(X) = 1 \cdot \frac{10}{36} + 3 \cdot \frac{4}{36} + 4 \cdot \frac{2}{36} + 0 \cdot \frac{20}{36} = \frac{10+12+8}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$$

D.h. B bekommt im Durchschnitt ca. 83 Cent pro Spiel ausgezahlt und müsste somit auch diesen Betrag als Einsatz bringen, damit das Spiel fair ist. Die mathematische Definition des fairen Spiels beruht auf dem Ansatz, dass der Erwartungswert des Gewinns pro Spiel Null ist, dass Gewinn oder Verlust auf lange Sicht also nur vom Zufall abhängen.

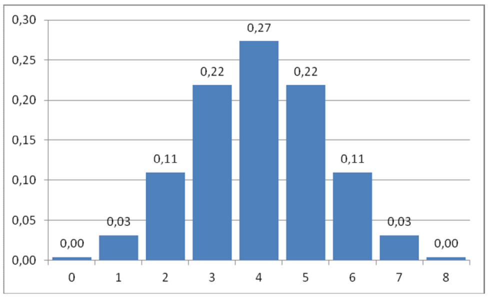
2.2.a. Die Kugeln können bei jedem Hindernis nur nach rechts oder nach links fallen, es handelt sich dabei also um einen Bernoulliversuch mit einer Erfolgs- (z.B. für rechts) und einer Misserfolgswahrscheinlichkeit (z.B. für links). Eine Kugel muss auf ihrem Weg durch das Galton-Brett z.B. 8 Hindernisse (Abb. 1) überwinden, was einer Bernoullikette der Länge 8 entspricht. Die Anzahl der ´Erfolge´ für jede Kugel ist also binomialverteilt nach B(8; p), bzw. nach B(n, p) für ein Galton-Brett mit n Hindernisebenen. Eine Kugel, die in einem der Sammelbehälter landet, entspricht demnach einer bestimmten Anzahl von Erfolgen und die Verteilung der Kugeln in den Sammelbehältern symbolisiert dadurch die entsprechende Binomialverteilung.
Sei X: „Anzahl der Kugeln, die bei 8 Stufen k-mal nach rechts fallen."
Dann ist X mit n=8 und p=q=0,5 B(8; 05)-verteilt:

X = k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X = k)	0,00	0,03	0,11	0,22	0,27	0,22	0,11	0,03	0,00

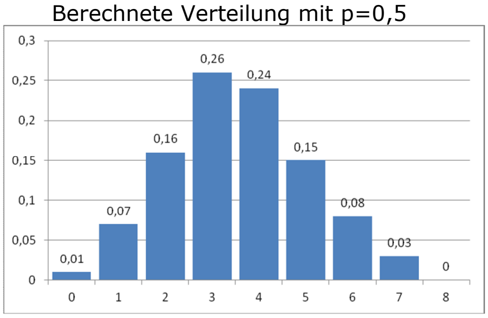
Histogramm der Verteilung:



2.2.b. Ein Stichprobenumfang von ca. 150 Versuchen ist nicht groß genug, um eine endgültige Aussage über die Wahrscheinlichkeiten machen zu können. Je größer der Stichprobenumfang, desto besser die Annäherung an die echte Wahrscheinlichkeit.
Dennoch fällt bei einem Vergleich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf, dass es eine signifikante Verschiebung der Werte der experimentellen Verteilung nach links gibt. Vermutlich hing das Brett bei der Durchführung der Versuchsreihe schief (rechts tiefer als links), so dass p<0,5 und q>0,5 war.



Berechnete Verteilung mit p=0,5



Experimentelle Verteilung mit p<0,5

2.3.a. Die Anzahl der ´Wappen´ ist B(35; 0,4)-verteilt, da es sich bei dem Versuch um eine 35-stufige Bernoullikette mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von p=0,4 handelt.

$$P(X=15)=\binom{35}{15}\cdot 0{,}4^{15}\cdot 0{,}6^{20}\approx 0{,}128$$

b. $P(X>10)=1-P(X\le 10)\overset{\text{GTR: 1–binomcdf(35,0.4,10)}}{\approx} 1-0{,}112=0{,}888$

c. Hier kann nicht direkt mit der Binomialverteilung gearbeitet werden, da die Position der Erfolge bzw. Misserfolge in der Kette relevant ist.
$P(E_c)=0{,}4^{9}\cdot 0{,}6^{26}\approx 4{,}47\cdot 10^{-10}\approx 0$

d. Für den Erwartungswert einer Binomialverteilung gilt:
$E(X)=n\cdot p=35\cdot 0{,}4=14$

e. Für die Standardabweichung einer Binomialverteilung gilt:
$\sigma_X=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{35\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}\approx 2{,}90$
Damit ergibt sich für das σ-Intervall $[E(X)-\sigma\le k\le E(X)+\sigma]$ um den Erwartungswert näherungsweise $[11{,}10\le k\le 16{,}90]$.
In diesem Intervall liegen die Werte 12 bis 16 der Zufallsgröße X.
Damit gilt: $P(12\le X\le 16)=P(X\le 16)-P(X\le 11)\approx 0{,}807-0{,}195=0{,}612$