Mat VI Di	14.10.11
Klassenarbeit: Geraden und Ebenen, Skalarprodukt	Lösungen

1) a) Punkt-Richtungs-Form der Geraden:

$$h: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Der Richtungsvektor von h muss kollinear zum Richtungsvektor von g sein. Für echte Parallelität darf zusätzlich der Stützpunkt von h nicht auf g liegen:

$h: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllt z.B. beide Bedingungen.

2) Die beiden Geraden dürfen nicht windschief sein, da sie dann keine Ebene aufspannen können. Alle anderen Lagebeziehungen lassen eine entsprechende Ebene zu. Schneiden sich die Geraden in einem Punkt, ist die Ebene eindeutig durch diesen Schnittpunkt und die beiden Richtungsvektoren bestimmt. Sind die Geraden parallel, ist die Ebene ebenfalls eindeutig durch einen Richtungsvektor und einen Verbindungsvektor zwischen den Geraden bestimmt. Sind die Geraden identisch, gibt es unendlich viele mögliche Ebenen, die die Gerade enthalten, da der zweite Richtungsvektor frei wählbar ist.

Untersuchung der Lagebeziehung der Geraden g und h:

Die Richtungsvektoren von g und h sind (wie man leicht sieht) nicht kollinear. Die Geraden sind nicht parallel.

Entscheidung zwischen den Fällen „windschief" und „schneiden sich" durch Untersuchung auf einen Schnittpunkt:

Gleichsetzen der Terme

liefert das LGS und damit die Koeffizientenmatrix

$$\begin{vmatrix} 3r & -4t & = 1 \\ -r & -2t & = -7 \\ 2r & -2t & = 2 \end{vmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & -7 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}\right] \overset{\text{GTR:rref}}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Das LGS ist eindeutig lösbar mit $r = 3$ und $t = 2$, d.h. g und h besitzen einen Schnittpunkt.

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(10|-1|7) \text{ ist Schnittpunkt von g und h.}$$

Ebenengleichung mit S als Stützpunkt und den Richtungsvektoren von g und h:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(Als Stützpunkt ist auch jeder beliebige Punkt der Geraden möglich.)

3) a) Ebene durch A, B und D:

$E_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AD}$

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \left(\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) + t \cdot \left(\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$C \in E_1$ kann durch Lösen des zugehörigen LGS gezeigt werden oder (leichter) durch Einsetzen in die Koordinatengleichung von E_1.

b) Zu untersuchen sind Seitenlängen und Innenwinkel des Vierecks.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3 \quad ; \quad \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3 \quad ; \quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$$

Die Seiten besitzen alle die Länge 3 L.E., d.h. es kann sich nur um ein Quadrat oder um eine Raute handeln.

Prüfung auf Orthogonalität bei $\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0$$

Das Viereck besitzt einen rechten Winkel und muss demzufolge ein Quadrat sein.

c) Normalenvektor von E_1:

LGS aus den Bedingungen erstellen, als Koeffizientenmatrix in den GTR eingeben und mit der Matrixfunktion rref bearbeiten:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} * \vec{n} = 0 \wedge \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} * \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{r} -n_1 + 2n_2 + 2n_3 = 0 \\ 2n_1 - n_2 + 2n_3 = 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Setze z.B. $n_3 = -1$. Daraus folgt: $n_1 = 2$ und $n_2 = 2$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ ist Normalenvektor von E_1.

Damit ist $\left[\vec{x} - \vec{a}\right] * \vec{n} = \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = 0$ eine Normalenform von E_1.

Ausmultiplizieren der Skalarprodukte:

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \vec{x} * \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 = 0$$

Also ist $2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 = 0$ eine Koordinatengleichung von E_1.

zu Teil a):
Überprüfung, dass C in E_1 liegt:
Einsetzen der Koordinaten von $C(2|2|5)$ in die Gleichung von E_1 liefert mit $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 5 - 3 = 0$ eine wahre Aussage, d.h. der Punkt C ist Element der Ebene E_1; das Viereck ABCD ist eben.

d) Der Winkel zwischen zwei Ebenen wird durch den Winkel zwischen ihren Normalenvektoren definiert.

Normalenvektor von E_1: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der x_1-x_2-Koordinatenebene: $\vec{n}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\angle(\vec{n}_E, \vec{n}_K):\ \cos\alpha = \frac{\vec{n}_E * \vec{n}_K}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_K|} = \frac{-1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109{,}5^\circ$$

Da üblicherweise der kleinere Winkel angegeben wird, ist $\alpha' \approx 70{,}5^\circ$.

e) Zwei Ebenen können offensichtlich identisch sein, bzw. bei kollinearen Normalenvektoren auch echt parallel. Wenn dies nicht der Fall ist, schneiden sie sich in einer Geraden.
Untersuchung auf Schnittgerade:
Gleichsetzen der Terme führt zu dem folgenden LGS, das durch Überführung in eine Koeffizientenmatrix und Vereinfachung mittels GTR bearbeitet wird:

$$\left|\begin{array}{lllll} -r & +2s & -2t & +u & =0 \\ 2r & -s & +3t & -3u & =-1 \\ 2r & +2s & 2t & -4u & =1 \end{array}\right| \quad \overset{\text{Koeffizientenmatrix GTR: rref}}{\Rightarrow} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Das LGS besitzt keine Lösung (siehe Gleichung III). Es existiert also keine Schnittgerade, d.h. die Ebenen sind parallel oder identisch. Die Überprüfung, ob z.B. $A(1|1|1) \in E_2$ gilt (Punktprobe mit LGS $\rightarrow$ keine Lsg.) liefert das Ergebnis $A \notin E_2$. Die Ebenen sind also echt parallel.

4) a) Die Geraden der Schar schneiden sich alle im Punkt $A(2|3|4)$. Von diesem Punkt aus verlaufen die Geraden „fächerförmig" auseinander, wobei sie jeweils durch einen Punkt mit der x_2-Koordinate 2 und der x_3-Koordinate -3 laufen. Dadurch, dass $a \in \mathbb{R}$ gilt, bilden die Geraden insgesamt quasi eine Ebene.

b) Zu lösen ist die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Die zweite und die dritte Komponentengleichung liefern $r = -2$. Für $r = -2$ in der ersten Komponentengleichung ergibt sich $a = 2$.
A liegt also auf der Geraden h_2.

c) Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ der Geraden muss Normalenvektor der Ebene E sein, d.h. er muss paarweise orthogonal zu den Richtungsvektoren von E sein.
Für den einen Richtungsvektor von E ergibt sich daraus

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -6$$

Mit $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ ist auch die Orthogonalität zum zweiten Richtungsvektor von E gegeben.

Damit verläuft die Gerade $h_{-6} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ senkrecht zu E.