Mat VIb Di	23.10.11
Arbeitsblatt: Kombinatorik, Zufallsgrößen, Bin.-verteilung	Lösungen

1) Modell: Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.

Anzahl der möglichen Fälle: $\frac{n!}{(n-k)!} = 504$, mit n=9 und k=6

Anzahl der günstigen Fälle: 1

$p = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{6!}{9!} \approx 0{,}002$

2) Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Anzahl der möglichen Fälle: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

a) Es gibt $\binom{60}{12} = \frac{60!}{(60-12)! \cdot 12!} \approx 1{,}40 \cdot 10^{12}$ Möglichkeiten.

b) Es gibt $\binom{35}{7} \cdot \binom{25}{5} \approx 3{,}57 \cdot 10^{11}$ Möglichkeiten.

c) Es gibt $\binom{20}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{20}{4} \approx 1{,}14 \cdot 10^{11}$ Möglichkeiten.

3) Modell: Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen.
Anzahl der möglichen Fälle: $n^k = 46656$, mit n=6 und k=6
Bei 6!=720 Ergebnissen zeigen alle Würfel verschiedene Augenzahlen, d.h. bei (46656 - 720)=45936 gibt es wenigstens zwei gleiche Augenzahlen (Anzahl der günstigen Fälle).

$p = \frac{6^6 - 6!}{6^6} = \frac{45936}{46656} \approx 0{,}9846 \approx 98{,}5\%$

4) $E(X) = \sum_i \left(k_i \cdot P(X = k_i)\right)$

$E(X) = 2 \cdot 0{,}403 + 3 \cdot 0{,}259 + 5 \cdot 0{,}161 + 8 \cdot 0{,}101 + 12 \cdot 0{,}067 = 4$

5) X: *Gewinn pro Spiel*.

k_i	1	-1
$P(X=k_i)$	0,25	0,75

$E(X) = 1 \cdot 0{,}25 - 1 \cdot 0{,}75 = -0{,}50$

Man verliert im Mittel pro Spiel 0,50 €; das Spiel ist nicht fair.

6) a) X beschreibe die *Anzahl der Sechsen bei 100 Würfen* mit einem idealen Würfel. X ist $B_{10;\frac{1}{6}}$-verteilt.

$E(X) = \mu = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{6} = \frac{50}{3} \approx 16{,}67$

$V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{9} \approx 13{,}89$.

b) Mit $3\sigma = 3 \cdot \sqrt{\frac{125}{9}} \approx 11{,}18$ ergibt sich für das 3σ-Intervall um den Erwartungswert $[E(X) - 3\sigma \leq k \leq E(X) + 3\sigma]$ näherungsweise $[5{,}49 \leq k \leq 27{,}85]$.
In diesem Intervall liegen die Werte 6 bis 27 der Zufallsvariablen X.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit

$$P(6 \leq X \leq 27) = P(X \leq 27) - P(X \leq 5) \overset{\text{GTR:binomcdf}}{\approx} 0{,}9969 - 0{,}0004 = 0{,}9965$$

7) X: *Anzahl der beschädigten Eier bei einer Ziehung von 5 Stück*.
X ist $B_{5;0,02}$-verteilt.

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 \approx 0{,}3277$$

8) a) X: *Anzahl der defekten Artikel bei einer Ziehung von 10 Stück*.
X ist $B_{10;0,05}$-verteilt.

$P(X = 0) = P(X \leq 0) \approx 0{,}5987$

b) X: *Anzahl der defekten Artikel bei einer Ziehung von 20 Stück*.
X ist $B_{20;0,05}$-verteilt.

$P(X \leq 1) \approx 0{,}7358$

9) a) X: *Anzahl der zu einem Zeitpunkt benötigten Maschinen*.
X ist $B_{10;0,4}$-verteilt.

$P(X \leq 4) \approx 0{,}6331$

b) $P(X \leq k) \geq 0{,}90 \Rightarrow k = 5$

Es werden mindestens 5 Maschinen benötigt.