Mat VIb Di	07.10.11
Arbeitsblatt: Parameter- und Normalenform von Ebenen	Lösungen

1) a) $e: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$; $r, s \in IR$

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} * \vec{n} = 0 \ \wedge \ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} * \vec{n} = 0$

$$\begin{aligned} -2n_1 - n_2 - 3n_3 &= 0 \\ n_1 - 7n_2 + 3n_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0 \end{array}\right]$$

Setze z.B. $n_3=5$: Daraus folgt $n_1=-8$ (Gl. I) und $n_2=1$ (Gl. II)

Damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ Normalenvektor von e.

c) $e: [\vec{x} - \vec{p}] * \vec{n} = 0$

$$e_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

d) Für P: $\left[\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -60 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P \notin e$

Für Q: $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q \in e$

2) a) $e_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$; $e_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

b) $\angle e_1, e_2 = \angle \vec{n}_1, \vec{n}_2$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{16}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} \approx 0{,}941 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 19{,}7^\circ$$

3) a) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} * \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 0$

$8x_1 + 4x_2 - 8x_3 - (-8 + 8 - 8) = 0$

$8x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -8$

b) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ einsetzen in die Koordinatengleichung:

$8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 8 \cdot 5 = -8 \quad \Rightarrow \quad P \in e_1$

c) $e_1 \perp e_2$, wenn $\vec{n}_{e1} \perp \vec{n}_{e2}$.

Gesucht ist ein orthogonaler Vektor zu $\vec{n}_{e1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

Es muss gelten: $8n_1 + 4n_2 - 8n_3 = 0$

Mit z.B. $n_1 = 1$ und $n_3 = 1$ ergibt sich $n_2 = 0$

Daraus folgt $\vec{n}_{e2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit z.B. $e_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

(Jeder Punkt des Raumes kann als bekannter Punkt der Ebene verwendet werden.)

d) $\angle e_1, e_3 = \angle \vec{n}_{e1}, \vec{n}_{e3}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{20}{12 \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}445 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 63{,}5^\circ$$