Mat VIb Di	19.10.11
Arbeitsblatt: Geraden und Ebenen (2)	Lösungen

1) a) Normaleneinheitsvektor von e:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \vec{n}^0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hesseschen Normalenform (HNF) von e:

$$e\colon\ \frac{1}{3} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

b) Ausmultiplizieren der Skalarprodukte liefert

$$e : \frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 9) = 0$$

c) Es gilt: $3 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - 9 = 0$

Die Koordinaten von B erfüllen die Ebenengleichung, d.h. $B \in e$.

d) Normalenvektor von e als Richtungsvektor von g; Ortsvektor von B als Stützvektor von g:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \ ;\ r \in IR$$

e) $d(P, e) = \left| \frac{1}{3}(p_1 - 2p_2 + 2p_3 - 9) \right| = \left| \frac{1}{3}(1 - 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 - 9) \right| = 2\,\text{L.E.}$

f) Normalenvektor von e als Richtungsvektor von g; Ortsvektor von P als Stützvektor von g:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \ ;\ s \in IR$$

2) a) Ausmultiplizieren der Skalarprodukte liefert

$e_1 : 8x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 8 = 0$

b) Normaleneinheitsvektor von e_1:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow \vec{n}^0 = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$e_1 : \frac{1}{12}(8x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 8) = \frac{2}{3}(x_1 + 2x_2 - x_3 + 1) = 0$$

c) $d(O, e_1) = \left| \frac{2}{3}(0 + 2 \cdot 0 - 0 + 1) \right| = \left| \frac{2}{3} \right| \approx 0{,}67\,\text{L.E.}$

d) $d(A, e_1) = \left| \frac{2}{3}(1 + 2 \cdot 1 - (-2) + 1) \right| = \left| \frac{12}{3} \right| = 4\,\text{L.E.}$

e) Der Schnittwinkel α zwischen zwei Ebenen lässt sich über den Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen bestimmen.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_{e1} * \vec{n}_{e2}}{\left|\vec{n}_{e1}\right| \cdot \left|\vec{n}_{e2}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{12 \cdot \sqrt{14}} = \frac{20}{12 \cdot \sqrt{14}} \approx 0{,}445 \Rightarrow \alpha \approx 63{,}5°$$

f) Gesucht ist ein Punkt der Ebene e_3, also ein Punkt mit einem Abstand von 4 L.E. von e_1. Ein solcher Punkt ist z.B. $A(1|1|-2)$.
e_3 hat aufgrund der Parallelität den gleichen Normalenvektor wie e_1.
Daraus folgt:

$$e_3: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 0$$

3) a)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{n}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \vec{n}^0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

HNF von $e_1: \frac{1}{7}(2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 32) = 0$

b) Der Schnittwinkel α zwischen einer Geraden und einer Ebene lässt sich über den Winkel β zwischen dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden und dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene bestimmen.
Es gilt: $\beta = 90° - \alpha$ und damit $\cos\beta = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$
Daraus folgt:

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\vec{n} * \vec{u}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{u}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{7 \cdot \sqrt{11}} = \frac{19}{7 \cdot \sqrt{11}} \approx 0{,}818 \Rightarrow \alpha \approx 54{,}9°$$

c) $d(O, e_1) = \left|\frac{1}{7} \cdot (32)\right| = \frac{32}{7}$ L.E.

HNF von $e_2: \frac{1}{7}(2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 18) = 0$

$d(O, e_2) = \left|\frac{1}{7} \cdot (18)\right| = \frac{18}{7}$ L.E.

Die beiden Abstände haben gleiches Vorzeichen, d.h. die beiden Ebenen liegen im KOS auf der gleichen Seite bzgl. des Ursprungs.

Damit gilt: $d(e_2, e_1) = \left|d(e_2, O) - d(e_1, O)\right| = \left|\frac{18}{7} - \frac{32}{7}\right| = \frac{14}{7} = 2$ L.E.