| Mat VIb Di | 12.10.11 |
|---|---|
| Arbeitsblatt: Geraden und Ebenen (1) | Lösungen |

1) a) Gerade durch zwei gegebene Punkte:

$$g:\vec{x}=\vec{p}+r\cdot(\vec{q}-\vec{p})\ ;\ r\in IR$$

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\left(\begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-6\\4\\-4\end{pmatrix}\ ;\ r\in IR$$

b) Parallele Gerade, d.h. kollinearer Richtungsvektor und (der Einfachheit wegen) Stützpunkt $O(0|0|0)$:

$$g:\vec{x}=s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\ ;\ s\in IR$$

Ggf. Überprüfung, ob der Stützpunkt der einen Geraden auch auf der anderen liegt, um die Fälle echt parallel bzw. identisch zu unterscheiden.

2) Normalenvektor für e:

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}*\vec{n}=0\ \wedge\ \begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}*\vec{n}=0$$

liefert das LGS und damit die Koeffizientenmatrix

$$\left|\begin{array}{rrrr}3n_1 & -n_2 & +2n_3 & =0\\ -3n_1 & +4n_2 & +n_3 & =0\end{array}\right| \qquad \left[\begin{array}{rrr|r}3 & -1 & 2 & 0\\ -3 & 4 & 1 & 0\end{array}\right] \overset{\text{GTR:rref}}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$$

Setze in Gleichung I $n_3=-1\Rightarrow n_1=1$ ; aus Gl. II folgt dann $n_2=1$.

Also gilt: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ ist nicht kollinear zum Richtungsvektor von g; d.h. g ist nicht orthogonal zu e.

$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix}=0$ . Der Normalenvektor von e und der Richtungsvektor von g sind orthogonal. Damit ist g parallel zu e oder g liegt sogar in e. Punktprobe: Der Stützpunkt (1|-4|2) von g erfüllt die Ebenengleichung nicht (das zugehörige LGS besitzt keine Lösung), d.h. g ist echt parallel zu e.

3) a) Ebene durch A, B und D:

$$e: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + t \cdot \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$C \in e$ kann durch Lösen des zugehörigen LGS gezeigt werden oder (leichter) durch Einsetzen in die Koordinatengleichung von e (siehe Teil c)).

b) Zu untersuchen sind Seitenlängen und Innenwinkel des Vierecks.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36} = 6 \quad ; \quad \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3 \quad ; \quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36} = 6$$

Die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks besitzen jeweils die gleiche Länge, d.h. ABCD ist ein Rechteck oder ein Parallelogramm. Prüfung auf Orthogonalität bei $\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 - 4 + 8 = 0$$

ABCD besitzt einen rechten Winkel und ist demzufolge ein Rechteck.

c) Normalenvektor von e:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} * \vec{n} = 0 \ \wedge \ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} * \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{aligned} -2n_1 + 4n_2 + 4n_3 &= 0 \\ 2n_1 - n_2 + 2n_3 &= 0 \end{aligned} \right|$$

LGS als Koeffizientenmatrix in den GTR eingeben und mit der Matrixfunktion rref bearbeiten liefert die Ergebnismatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Setze $n_3 = -1$. Daraus folgt: $n_1 = 2r$ und $n_2 = 2$

Damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Normalenvektor von e.

Als Normalenform der Ebene e (in vektorieller Darstellung) ergibt sich daraus

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{x} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren der Skalarprodukte liefert

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0$$

als Koordinatengleichung von e.

Überprüfung, dass C in e liegt:
$C(1|5|7)$ in e liefert mit $2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 - 7 - 5 = 0$ eine wahre Aussage, d.h. der Punkt C ist Element der Ebene e. C liegt demnach in der Ebene durch die Punkte A, B und D. Damit ist das Viereck ABCD eben.

d) Die Pyramidenspitzen müssen auf einer Geraden liegen, die durch den Mittelpunkt M der Grundfläche geht (Schnittpunkt der Diagonalen) und die senkrecht auf der Grundfläche steht.

Es gilt: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM}$ entspricht dem Stützvektor von g.
Der Richtungsvektor von g entspricht dem Normalenvektor von e.
Die Bedingung wird also von der Geraden g erfüllt.